Mathematik 2 für Informatik

Peter Ochs, Tobias Nordgauer

Sommersemester 2022

Hauptklausur Gedächtnisprotokoll

Bedingungen: 120min Zeit, einseitig beschriebenes Cheat-Sheet

Aufgabe 1. [10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(1071, 462)$.

(b) Bestimmen Sie $r, s \in \mathbb{Z}$, sodass $r \cdot 462 + s \cdot 1071 = \mathrm{ggT}(1071, 462)$.

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Bestimmen Sie alle Lösungen $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Beachten Sie, dass alle Zahlen als Restklassen in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ zu verstehen sind.)

Aufgabe 3. [4 + 4 + 2 = 10 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist und geben Sie gegebenenfalls ein S und D an, so dass $S^{-1}AS = D$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Entscheiden Sie, ob A invertierbar ist und geben Sie gegebenenfalls A^{-1} an.

Aufgabe 4. [3 + 4 + 3 = 10 Punkte]

Sei $V = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(a) Zeigen Sei, dass V ein $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und folgern Sie die Dimension von V.

(c) Betrachten Sie nun den Vektorraum $U = \mathbb{Q}[X]_{\leq 2}$ und die Basis $\mathcal{A} = (1, X, X^2)$ (dass $\mathcal{A}$ eine Basis von U ist, muss nicht gezeigt werden). Sei außerdem $\varphi : U \to V,\ p(X) \mapsto p(\sqrt{2})$, eine Abbildung, die $\sqrt{2}$ anstelle von X in ein Polynom einsetzt. Diese Abbildung ist linear und wohldefiniert (muss nicht gezeigt werden). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\varphi)$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Aufgabe 5. [3 + 4 + 3 = 10 Punkte]

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbert-Raum mit induzierter Norm $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in V$ gilt:

(a) $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$

(b) $||u+v|| = ||u-v|| \iff \langle u, v\rangle = 0$

(c) Ist eine der Bedingungen in (b) erfüllt, so gilt $P_{\mathrm{Lin}(V)}(u+v) = v$ für die Projektion von $u+v$ auf die lineare Hülle von v.

Aufgabe 6. [2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte]

Entscheiden Sie über folgende Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort.

(a) Jedes Element in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ hat ein multiplikatives Inverses.

(b) Das Polynom $X^4 + 2$ hat in $\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$ eine Nullstelle.

(c) Die Signatur von $(1, 2, 3, 4) \in S_5$ ist 1.

(d) Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, die injektiv ist.

(e) Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist in $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Danke für die Hilfe an alle Beteiligten.
Keine Garantie auf Korrektheit.
LaTeX von Marvin Borner.