Mathematik 2 für Informatik

Peter Ochs, Tobias Nordgauer

Sommersemester 2022

Nachklausur Gedächtnisprotokoll

Bedingungen: 120min Zeit, einseitig beschriebenes Cheat-Sheet

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Finden Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes alle $x \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 \\ x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

gilt.

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 14 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & -7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^{4\times 4}$$

Bestimmen Sie, falls existent, die Inverse von A. Geben Sie die Einträge von A^{-1} mit den kanonischen Repräsentaten $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ aus $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ an.
Beachten Sie: Wie üblich sind die Zahlen als Restklassen zu lesen.

Aufgabe 3. [4 + 3 + 3 = 10 Punkte]

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

(b) Entscheiden Sie über Diagonalisierbarkeit von A und geben Sie gegebenenfalls eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, sodass $S^{-1}AS = D$.

(c) Bestimmen Sie A^n für $n = 10$.

Aufgabe 4. [3 + 4 + 3 = 10 Punkte]

Betrachten Sie für $I := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Menge

$$V := \{\lambda \cdot E_2 + \mu \cdot I \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

(a) Zeigen Sie: V ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V als $\mathbb{R}$-Vektorraum und folgern Sie die Dimension von V.

(c) Betrachten Sie nun den Vektorraum $U := \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 3 und die Basis $\mathcal{A} := (X^0, X, X^2, X^3)$ (dass $\mathcal{A}$ eine Basis von U ist, muss nicht gezeigt werden). Sei außerdem

$$\varphi : U \to V, \quad p(X) \mapsto p(I)$$

die Abbildung, die I in ein Polynom aus U anstelle der Unbekannten X einsetzt (dabei ist I^0 definiert als die Einheitsmatrix E_2). Diese Abbildung ist linear und wohldefiniert (muss nicht gezeigt werden). Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Aufgabe 5. [3 + 3 + 4 = 10 Punkte]

Sei $\varphi : V \to V$ ein Isomorphismus zwischen zwei K-Vektorräumen.

(a) Zeigen Sie: 0 ist kein Eigenwert von φ.

(b) Zeigen Sie: Ist λ Eigenwert von φ, so ist λ^{-1} Eigenwert von φ^{-1}.

(c) Sei nun $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein reeler Prä-Hilbertraum und $\phi : V \to V$ eine orthogonale Abbildung, d.h. es gilt für alle $v, w \in V$:

$$\langle \phi(v), \phi(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Zeigen Sie: Die einzigen möglichen Eigenwerte von ϕ sind ± 1.

Aufgabe 6. [2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10 Punkte]

Entscheiden Sie über folgende Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Begründen Sie ihre Antwort.

(a) Für zwei Polynome $p, q \in \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}[X]$ gilt stets: $\mathrm{grad}(pq) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$.

(b) $X^2 + 4$ hat in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ genau 2 Nullstellen.

(c) Es gibt ganze Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$, sodass $3 = r \cdot 42 + s \cdot 99$

(d) Jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Isomorphismus.

(e) Jede Gruppe, deren Ordnung eine Primzahl ist, ist zyklisch.

Danke für die Hilfe an alle Beteiligten.
Keine Garantie auf Korrektheit.
LaTeX von Marvin Borner.