Mathematik für Informatik 2

Klausurvorbereitung

Marvin Borner

Sommersemester 2022

Dies ist meine WIP Zusammenfassung, welche hauptsächlich mir dienen soll. Ich schreibe außerdem ein inoffizielles Skript, welches auf https://marvinborner.de/mathe2.pdf zu finden ist.

Inhalt

1 Negative Zahlen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Solange n addieren, bis die Zahl positiv ist.

Beispiel: Äquivalenzklassen in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

1. $[-2] = [4]$
2. $[-7] = [5]$

2 Reduzibilität

Generell: Bei Polynomen der Grade 2/3 prüfen auf Nullstellen, da $f = (x - a)g$ reduzibel mit a NS. Bei Grad 4 Spezialfall der Zelegung in zwei irreduzible Polynome zweiten Grades beachten (siehe Beispiel).

Bei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ typischerweise jegliche Kombinationen ausprobieren und NS finden.

Beispiel: Reduzibilität von $f = x^4 + 2x^2 + 1$ in $\mathbb{R}[X]$:
Man erkennt schnell, dass f keine NS in $\mathbb{R}$ besitzt, da die Exponenten jeweils positiv sind.
ALLERDINGS: Polynome in Grad 4 sind durch Polynome folgender Grade reduzibel:

$$4 = 4 + 0 = 1 + 3 = 1 + 1 + 2 + 2 = 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Eine Zerlegung in ein Polynom mit Graden $4+0$ wäre der irreduzible Fall. Alle Zerlegungen mit 1 stellen den Fall einer Nullstelle dar, da dort ein Linearfaktor existiert. Dann bleibt hier der Fall $2 + 2$.
Dann muss die Zerlegung existieren:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Durch die Koeffizienten von f entsteht ein LGS:

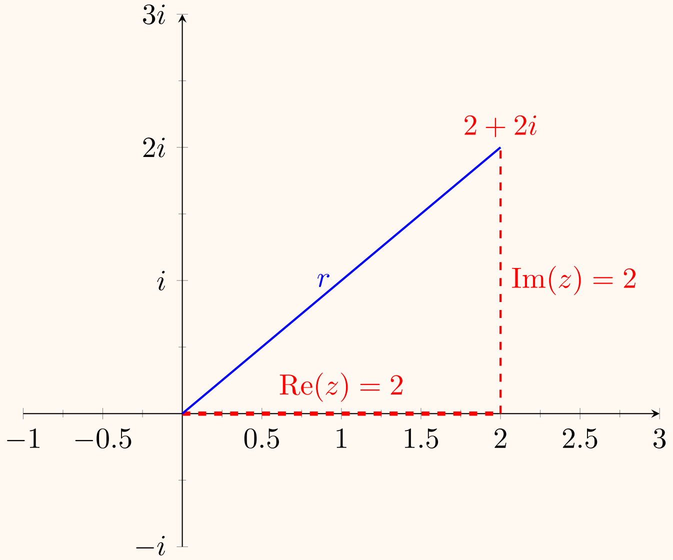
$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b + ac + d &= 2 \\ ad + bc &= 0 \\ bd &= 1 \end{aligned}$$

Mit der Lösung $a = c = 0$ und $b = d = 1$ lässt sich f in $(x^2 + 1)(x^2 + 1)$ zerlegen.

3 Komplexe Zahlen

3.1 Gleichungen mit komplexen Zahlen lösen

Beispiel: Bestimmen von z bei $z^3 = 2 + 2i$.



Zuerst bestimmt man die Exponentialdarstellung mittels des Winkels. In diesem Fall ist $\varphi = \frac{\pi}{4}$. r lässt sich mit Pythagoras berechnen als $r^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \implies r = \sqrt{8}$. Dann ist $z^3 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{4}+k2\pi)}$. Es folgt mit $k = 0, 1, 2$:

$$z_k = (\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} e^{i(\frac{\pi}{4}+k2\pi)\cdot\frac{1}{3}} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+k\frac{2}{3}\pi)}.$$

Alle Lösungen liegen dann auf dem imaginären Kreis.

4 Vektorräume

4.1 Prüfen auf Erzeugendensystem/Basis

Prüfen, ob $E = \{v_1, ..., v_n\}$ eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem von Vektorraum V ist:

0. Für Basis ggf. zuerst auf lineare Unabhängigkeit prüfen zwecks Effizienz (wenn offensichtlich, sonst sowieso ZSF in nächsten Schritten)
1. Matrix A erstellen mit Vektoren $v_1, ..., v_n$ als Zeilen untereinander
2. Rang von A bestimmen
3. Dimension von V bestimmen
   - wenn $\text{rank}(A) = \dim(V)$, dann E Erzeugendensystem
   - wenn zusätzlich $\text{rank}(A) = n$, dann E Basis
4. Wenn keine Basis: Basis ermitteln/ergänzen:
   - wenn $\text{rank}(A) < \dim(V)$, dann alle linear unabhängigen Vektoren (nicht-Nullzeilen der ZSF) zu einer Basis ergänzen (z.B. durch passende Einheitsvektoren)
   - wenn $\text{rank}(A) = \dim(V) < n$, dann linear abhängige Vektoren streichen

ODER über Determinante $\neq 0$ (TUDU)

4.2 Basis ermitteln

- Spalten einer Matrix bilden dessen Basis

4.3 Prüfen auf lineare Unabhängigkeit

Anwenden des Gauß-Algorithmus:

Beispiel mit $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 11 & 5 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erkennt die lineare Unabhängigkeit: Die Vektoren bilden eine Basis in $\mathbb{R}^3$.

4.4 Prüfen auf Untervektorraum

Über Untervektorraumaxiome:

1. $0 \in U$
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$
3. $x \in U, \lambda \in K \implies \lambda x \in U$

Über Kern/Bild:

Wenn man zeigen soll, dass eine Menge einen Untervektorraum darstellt, ist es sinnvoll die Tatsache zu verwenden, dass sowohl Kern als auch Bild immer Untervektorräume darstellen.

Beispiele: Schreiben einer Menge als Kern zum Beweis des Untervektorraums.

1. Sei $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$. Dies lässt sich schreiben als Matrixvektorprodukt mit $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : (1, -1, -1)(x_1, x_2, x_3)^\top = 0\}$. Dann ist U wegen der Definition des Kerns mit $U = \{x \in V : Ax = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
2. Sei $U = \{(u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2u_1 + 3u_2 - u_3 \\ u_1 - 4u_2 + 3u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Dies lässt sich schreiben als Matrixvektorprodukt mit $U = \{(u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} (u_1, u_2, u_3)^\top = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Dann ist U wegen der Definition des Kerns mit $U = \{x \in V : Ax = 0\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.

Beispiel: Schreiben einer Menge als Bild zum Beweis des Untervektorraums.

Sei $U = \{(2x, -3x)^\top : x \in \mathbb{R}\}$. Dies lässt sich schreiben als $U = \{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} x : x \in \mathbb{R}\}$. Dann ist U wegen der Definition des Bildes mit $U = \{Ax : x \in V\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

5 Prüfen auf Linearität

5.1 Homomorphismus

Beide Bedingungen lassen sich gemeinsam prüfen mit:

$$f(\lambda \vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

6 Matrizen

6.1 Matrizen transponieren

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \implies A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

6.2 Rang bestimmen

1. Matrix in Zeilenstufenform bringen
2. Die Anzahl aller Zeilen, die nicht vollständig aus Nullen bestehen, entspricht dem Rang

6.3 Bild bestimmen

1. Transponierte Matrix $A^\top$ in Zeilenstufenform bringen
2. Umgeformte Matrix erneut transponieren
3. Die Menge aller Linearkombinationen der Spalten, die nicht vollständig aus Nullen bestehen, entspricht dem Bild

6.4 Kern bestimmen

1. Gleichungssystem $A \cdot v = 0$ aufstellen (mit $A \in K^{m \times n} \implies v \in K^{n \times 1}$)
   - A ist dann eine Abbildungsmatrix
2. Gleichungssystem in Zeilenstufenform bringen
3. Lösung (in Abhängigkeit von Parametern) als Menge schreiben

6.5 Determinante bestimmen

6.5.1 Regel von Sarrus

Gilt bei 3×3-Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$
$$\implies \det(A) = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$

6.5.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

1. Gauß nutzen für Zeilenstufenform (rechte obere Dreiecksmatrix)
   - bei jeder Vertauschung der Zeilen muss die Determinante mit -1 multipliziert werden
2. Die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente:

$$\det(A) = (-1)^{\#\text{Vertauschungen}} \cdot a'_{11} \cdot \dots \cdot a'_{nn}$$

6.5.3 Laplacescher Entwicklungssatz

1. Wähle Zeile/Spalte aus, nach welcher entwickelt wird (optimalerweise möglichst viele Nullen)

2. Startpunkt als Faktor aufschreiben und mit der Determinanten der Matrix multiplizieren, die entsteht, wenn die gesamte derzeitige Zeile/Spalte gestrichen wird (abhängig von Schachbrettmuster ggf. mit -1 multiplizieren)

3. 2 wiederholen für alle Elemente der gewählten Spalte/Zeile und addieren

Beispiel: Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

6.6 Matrizen invertieren

Generell: Für 2×2-Matrizen empfiehlt sich das **Adjunktenverfahren**. Für 3×3-Matrizen empfiehlt sich das **Adjunktenverfahren** sowie die **Cramersche Regel**. Bei größeren Matrizen oder bei Matrizen mit vielen Nullen empfiehlt sich der **Gauß-Jordan-Algorithmus**.

Wichtig ist: Matrizen lassen sich nur invertieren, wenn $n \times n$ und

$$\operatorname{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff A^{-1} \text{ existiert.}$$

6.6.1 Adjunktenverfahren

Für $n \times n$-Matrizen: TUDU adj

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Für 2×2-Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6.7 Cramersche Regel

1. $\det(A)$ berechnen und $\det(A) \neq 0$ prüfen
2. Einzelne Einträge der Lösung $x = (x_1, ..., x_n)^\top$ mit $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ bestimmen (A_i ergibt sich, wenn die i-te Spalte von A durch den Vektor b ersetzt wird)

6.7.1 Gauß-Jordan-Algorithmus

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid E_n)$ bilden:

$$(A \mid E_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

2. Gaußsches Eliminationsverfahren anwenden, um die linke Seite auf die Einheitsmatrix zu bringen:

$$(E_n \mid A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{array} \right)$$

3. Die Matrix auf der rechten Seite entspricht dem Inversen von A

6.8 Charakteristisches Polynom bestimmen

Determinante von $A - \lambda E_n$ abhängig von λ bestimmen:

$$P_A = \det(A - \lambda E_n)$$

Beispiel: Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$:
Lösen durch Laplaceschen Entwicklungssatz:

$$\begin{aligned} P_A &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 1\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} - 2\det \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^2(\lambda - 6) \end{aligned}$$

6.9 Eigenwerte bestimmen

1. Charakteristisches Polynom P_A bestimmen
2. Nullstellen von P_A sind Eigenwerte

Beispiel: Mit $P_A = -\lambda^2(\lambda - 6)$:

$$\begin{aligned} &-\lambda^2(\lambda - 6) = 0 \\ \implies &\lambda_{1,2} = 0 \quad \wedge \quad \lambda_3 = 6 \end{aligned}$$

6.10 Eigenvektoren bestimmen

1. Eigenwerte λ_i bestimmen
2. Für jedes λ_i lösen:
$$V_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i E_n)$$
3. Die Lösungen werden jeweils abhängig von einer Variable sein $\rightarrow$ linearen Spann aufstellen

Beispiel: Mit $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 6$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$:

1. Eigenvektor für $\lambda_1 = 0$ berechnen:
   $A - \lambda_1$ umformen:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Gleichung $\ker(A - \lambda_1) \implies A - \lambda_1 = 0$ lösen:
   $$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ \implies & x_1 = -x_2 + 2x_3 \\ \implies & x_2 = ... = x_2 \\ \implies & x_3 = ... = x_3 \end{aligned}$$
   Linearen Spann aufstellen:
   $$V_0 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
2. Eigenvektor für $\lambda_3 = 6$ berechnen:
   $A - \lambda_3$ umformen:
   $$\begin{pmatrix} 1-6 & 1 & -2 \\ 1 & 1-6 & -2 \\ -2 & -2 & 4-6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Gleichung $\ker(A - \lambda_3) \implies A - \lambda_3 = 0$ lösen durch LGS:
   $$\begin{aligned} & 2x_1 + x_3 = 0 \quad \wedge \quad 2x_2 + x_3 = 0 \\ \implies & x_1 = -\frac{x_3}{2} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{x_3}{2} \quad \wedge \quad x_3 = x_3 \end{aligned}$$
   Linearen Spann aufstellen:
   $$V_6 = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.11 Eigenraum bestimmen

1. Eigenvektoren V_{λ_i} bestimmen
2. Linearen Spann aller Eigenvektoren aufstellen

Beispiel: Mit $V_0 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $V_6 = \text{Lin}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$:

$$\mathbb{L} = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$$

6.12 Diagonalmatrix und invertierbare Matrix bestimmen

Gesucht werden Lösungen von $S^{-1}AS = D$ mit der invertierbaren Matrix S und der Diagonalmatrix D.

1. Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen
2. Die Spalten der invertierbaren Matrix S entsprechen den Eigenvektoren
3. Die Elemente der Diagonalen der Diagonalmatrix entsprechen den Eigenwerten

Beispiel: Mit $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 6$ sowie $V_0 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ und $V_6 = \text{Lin}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$:

$$S = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\-1 & 0 & -1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\0 & \lambda_2 & 0\\0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$